

Mécanique des fluides appliquée Écoulements compressibles Ondes de choc

ESM/SDI/S4/MAJEURE MÉCANIQUE - OPTION PROPULSION
-ÉNERGIE

PATRICK BARREAU

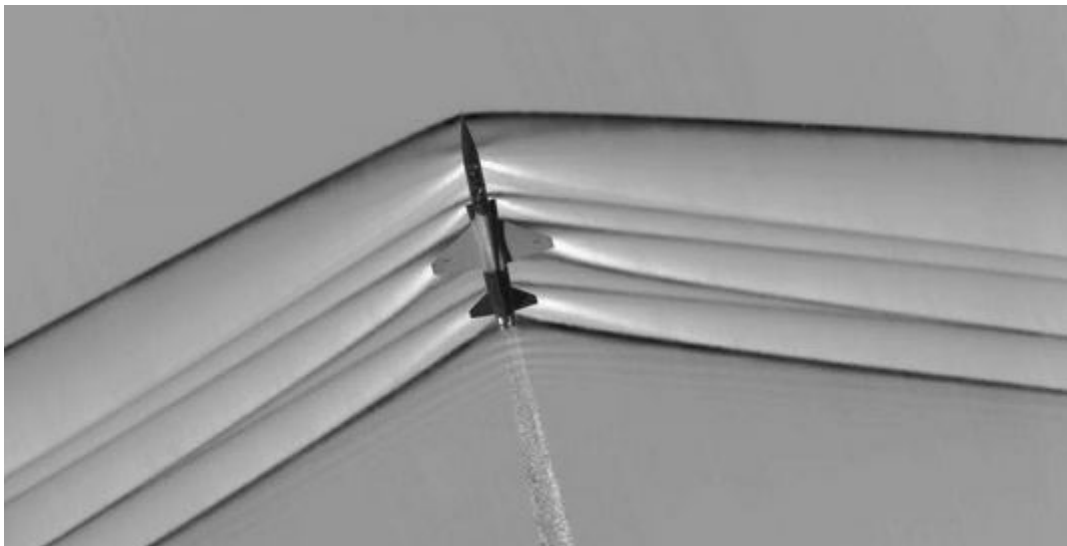


FIGURE 1 – Ondes de choc attachées à un avion en vol supersonique $M=1,09$ ©NASA

Table des matières

Sommaire	v
1 Définitions et rappels	1
1.1 Analyse du mouvement d'un élément de volume - Taux de déformation	1
1.1.1 Variations du vecteur vitesse en un point	1
1.1.2 Taux de dilatation volumique	2
1.2 Contraintes dans un fluide	3
1.3 Viscosité des fluides	4
1.3.1 Expérience de Couette - Viscosité dynamique	4
1.3.2 Viscosité cinématique	5
1.3.3 Variation de la viscosité avec la température et la pression	6
2 Théorèmes généraux	7
2.1 Hypothèses de travail	7
2.2 Dérivée particulaire (ou dérivée matérielle) d'une fonction scalaire	7
2.3 Dérivée particulaire d'une fonction vectorielle	7
2.4 Dérivée d'une intégrale de volume	8
2.4.1 Cas d'une fonction scalaire	8
2.4.2 Cas d'un vecteur	8
3 Équations fondamentales de la mécanique des fluides	9
3.1 Équation de conservation de la masse	9
3.1.1 Énoncé du principe	9
3.1.2 Équation intégrée	9
3.2 Équations des quantités de mouvement	10
3.2.1 Énoncé du principe	10
3.2.2 Équations dynamiques ponctuelles	10
3.3 Les équations de Navier-Stokes	11
3.3.1 Équations de la dynamique des fluides visqueux	11
3.3.2 Équations des fluides visqueux incompressibles : équations de Navier-Stokes	12
3.4 Équation intégrée du théorème des quantités de mouvement	12
3.5 Théorème de l'énergie cinétique	12
3.5.1 Principe	12
3.5.2 Détermination de la puissance des forces de volume P_v	13
3.5.3 Détermination de la puissance des forces de surface	14
3.5.4 Détermination de la puissance des forces intérieures	14
3.5.5 Écriture définitive du théorème de l'énergie cinétique	15

4	Théorème de Bernoulli	17
4.1	Rappel des équations de la dynamique	17
4.2	Cas des fluides parfaits, barotropes ou incompressibles	17
4.2.1	Équation dynamique ponctuelle	17
4.2.2	Intégration de l'équation dynamique ponctuelle	18
4.2.3	Cas des écoulements de fluides incompressibles homogènes	19
4.2.4	Charge	19
4.3	Cas des fluides visqueux incompressibles - Théorème de Bernoulli généralisé . . .	19
4.3.1	Hypothèses	19
4.3.2	Théorème de Bernoulli généralisé	20
4.3.3	Formules pour l'expression des pertes de charge régulière	20
4.3.4	Canalisations industrielles - Diagramme de Moody	21
4.3.5	Cas des pertes de charge singulières	22
5	Écoulements mono-dimensionnels des fluides compressibles	25
5.1	Étude générale de l'écoulement	26
5.1.1	Équations de base de l'écoulement	26
5.1.2	Vitesse du son dans un fluide quelconque	27
5.2	Étude de l'écoulement isentropique d'un gaz parfait	28
5.2.1	Écoulement adiabatique d'un fluide non pesant	28
5.2.2	Étude générale de l'écoulement	29
5.2.3	Particularités de l'écoulement	32
5.3	Écoulement unidimensionnel dans une tuyère	32
5.3.1	Rappel des hypothèses et de l'objectif de la tuyère	32
5.3.2	Relation de Hugoniot	32
5.3.3	Divers régimes de fonctionnement d'une tuyère	33
5.4	Tuyère convergente - divergente dans un moteur fusée	36
5.4.1	Expression de la poussée	36
5.4.2	Poussée si la tuyère est adaptée	36
5.4.3	Tuyère non adaptée	37
5.4.4	Rendements pour caractériser l'efficacité d'un propulseur	37
5.4.5	Puissance perdue	37
5.4.6	Puissance disponible	37
5.4.7	Rendement de propulsion	37
5.4.8	Impulsion spécifique du propulseur	38
6	Ondes de choc droit	39
6.1	Introduction	39
6.2	Choc normal	39
6.2.1	Hypothèses	39
6.2.2	Équations du choc	40
6.2.3	Expressions des rapports des pressions, masses volumiques, températures et nombre de Mach en fonction du nombre de Mach aval Ma_1	40
6.2.4	Variation d'entropie au passage du choc	44
6.2.5	Modifications des conditions génératrices	45
6.2.6	Expression du rapport des sections critiques	46

7 Ondes de choc oblique	47
7.1 Introduction	47
7.2 Équations à la traversée du choc oblique	48
7.3 Expressions des rapports de pressions, températures, masses volumiques et nombre de Mach	48
7.4 Expression de la différence d'entropie et conséquence	49
7.5 Polaire de choc	50
Bibliographie	53

Chapitre 1

Définitions et rappels

1.1 Analyse du mouvement d'un élément de volume - Taux de déformation

1.1.1 Variations du vecteur vitesse en un point

L'espace est rapporté au référentiel cartésien $R(x, y, z, t)$.

On considère à l'instant t un élément de volume entourant le point $M(x, y, z)$ et soit $M'(x, y, z)$ un point voisin de M .

On note $\vec{v}(u, v, w)$ la vitesse en M et $\vec{v}'(u', v', w')$ la vitesse au point M' .

Le vecteur infiniment petit $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes (h, k, l) .

On peut écrire que la composante u' du vecteur $\vec{v}'$ est :

$$u'(x+h, y+k, z+l) = u(x, y, z) + h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.1)$$

De même avec les deux autres composantes v' et w' .

En utilisant la notation indicielle, on écrit alors

$$u'_i = u_i + du_i = u_i + h_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

L'équation 1.1 peut s'écrire

$$u' = u + \frac{1}{2} \left[l \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} l \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

Le vecteur $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot \vec{v}}$ a pour composantes :

$$\vec{\Omega} = \begin{cases} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (1.4)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé vecteur tourbillon.

On note également les quantités ci-après

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon_{zy} & = & \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{xz} & = & \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yx} & = & \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{xx} & = & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} & = & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

On peut utiliser l'écriture synthétique

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

Les composantes du vecteur $\vec{v}'$ s'écrivent donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u' & = & u + (\eta l - \zeta k) + \epsilon_{xx}h + \epsilon_{xy}k + \epsilon_{xz}l \\ v' & = & v + (\zeta h - \xi l) + \epsilon_{yx}h + \epsilon_{yy}k + \epsilon_{yz}l \\ w' & = & w + (\xi k - \eta h) + \epsilon_{zx}h + \epsilon_{zy}k + \epsilon_{zz}l \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Ce qui s'écrit

$$\vec{v}'(M') = \vec{v}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \vec{D} \quad (1.8)$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}'$ est donc le résultat de la somme de trois vecteurs :

- le vecteur $\vec{v}$,
- le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$ qui correspond à une rotation en bloc de l'élément de volume autour du point M à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$,
- le vecteur $\vec{D}$ dont les composantes sont

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D_x & = & \epsilon_{xx}h + \epsilon_{xy}k + \epsilon_{xz}l \\ D_y & = & \epsilon_{yx}h + \epsilon_{yy}k + \epsilon_{yz}l \\ D_z & = & \epsilon_{zx}h + \epsilon_{zy}k + \epsilon_{zz}l \end{array} \right. \quad (1.9)$$

En notation indicielle $D_i = \epsilon_{ij}h_j$

Le vecteur $\vec{D}$ est appelée vitesse de déformation et les termes ϵ_{ij} sont les taux de déformation de l'élément de volume

1.1.2 Taux de dilatation volumique

On peut montrer que la quantité e définie par :

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{v} \quad (1.10)$$

est le **taux de dilatation cubique**

Conséquence : lorsque le fluide est incompressible, on a

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (1.11)$$

1.2 Contraintes dans un fluide

On considère un point M quelconque dans le fluide et un élément de surface autour du point M orienté par le vecteur normal $\vec{n}$.

Le vecteur contrainte au point M relativement à l'élément de surface dS orienté par le vecteur $\vec{n}$ est défini par

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{\vec{dF}}{dS} \quad (1.12)$$

avec $\vec{dF}$ la résultante des forces extérieures sur dS .

On peut définir un tenseur des contraintes au point M $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

Le vecteur contrainte s'écrit alors :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \vec{n} \quad (1.13)$$

Il est symétrique et est représenté par une matrice symétrique lorsque l'espace est rapporté à des coordonnées cartésiennes.

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

On peut donc écrire en notation indicielle :

$$\boxed{T_i = \sigma_{ij} n_j} \quad (1.15)$$

Dans le cas des fluides newtoniens, les contraintes σ_{ij} sont des fonctions linéaires des taux de déformation du milieu.

Elles s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} + \eta\delta_{ij}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (1.16)$$

avec

- p pression statique indépendante de la direction en un point donné
- μ et η deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses du fluide
 - μ correspond à la viscosité de cisaillement
 - η correspond à la viscosité de dilatation

On note τ_{ij} le terme

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \eta\delta_{ij}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (1.17)$$

Il s'écrit encore en utilisant e la notation pour le taux de dilatation cubique

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \eta\delta_{ij}e \quad (1.18)$$

L'équation 1.16 peut s'écrire sous forme vectorielle

$$\vec{T} = -p\vec{n} + \vec{\tau} \quad (1.19)$$

Le vecteur $\vec{T}$ est la contrainte totale et $\vec{\tau}$ la contrainte visqueuse.

Ses composantes normales sont :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases} \quad (1.20)$$

Les composantes tangentielles sont ;

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (1.21)$$

1.3 Viscosité des fluides

L'expression des contraintes a montré que les propriétés visqueuses des fluides newtoniens sont caractérisées par les deux paramètres μ et η .

Les forces tangentielles de viscosité sont mises en évidence par l'expérience de Couette.

1.3.1 Expérience de Couette - Viscosité dynamique

Le dispositif est constitué de deux cylindres coaxiaux, de rayons peu différents, dont l'espace annulaire est rempli d'un fluide.

Lorsque l'on entraîne le cylindre extérieur avec un moteur à une vitesse angulaire constante ω , le cylindre intérieur se met à tourner dans le même sens. Pour le maintenir immobile, il faut lui appliquer un couple C de sens opposé.

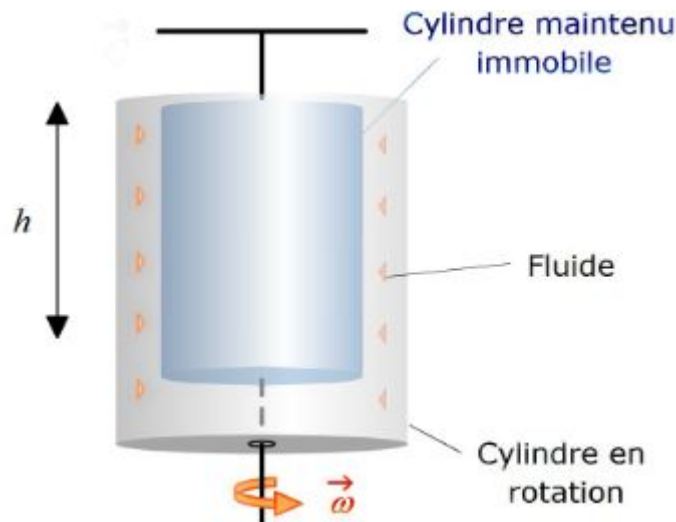


FIGURE 1.1 – Dispositif de Couette

La distance e , entre les cylindres, est très petite devant leur rayon moyen r (cf. figure 1.1) ; on peut alors modéliser l'expérience en considérant un fluide compris entre deux plans. Un plan P' mobile se déplaçant à une vitesse v et un plan fixe P parallèle à Ox de surface $S = 2\pi r h$.

Sur le plan fixe s'exerce une force de frottement F due à la présence du fluide.

L'écoulement qui s'établit est représenté sur la figure 1.2

L'expérience montre que la force F est proportionnelle au rapport $\frac{v}{e}$.

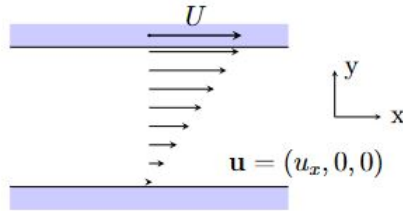


FIGURE 1.2 – Schématisation de l'écoulement de Couette

On a la relation

$$F = \mu S \frac{v}{e} \quad (1.22)$$

avec μ facteur de proportionnalité qui ne dépend que du fluide et de la température.

On peut définir une contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{v}{e} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.23)$$

La relation 1.23 est l'expression de la contrainte tangentielle τ_{xy} dans le cas d'un écoulement parallèle à Ox ($v = w = 0$).

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.24)$$

Le coefficient de proportionnalité μ se confond avec la viscosité de cisaillement .

μ est encore appelé **viscosité dynamique** ou **viscosité absolue**.

L'unité de la viscosité absolue est le Poiseuille (Pl).

1.3.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est définie par le rapport

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.25)$$

L'unité de la viscosité cinématique est le m^2/s .

Voici quelques valeurs pour trois fluides à la pression atmosphérique (1 bar) et 20 °C :

Fluide	μ (kg/(ms))	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)
Hydrogène	$9 * 10^{-6}$	0,084	$1,05 * 10^{-4}$
Eau	$1 * 10^{-3}$	998	$1,0 * 10^{-6}$
Air	$1,8 * 10^{-5}$	1,2	$1,5 * 10^{-5}$

1.3.3 Variation de la viscosité avec la température et la pression

Influence de la pression

La pression modifie peu la viscosité. Celle-ci pour les gaz et la plupart des liquides augmente légèrement avec la pression.

Une exception pour l'eau autour de 30 °C où la viscosité diminue légèrement avec la pression. Généralement, les effets de la pression sont considérés comme négligeables jusqu'à 100 bars.

Influence de la température

- la viscosité des gaz augmente avec la température. Il existe deux modèles :
la loi en puissance

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1.26)$$

la loi de Sutherland

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} (T_0 + S)}{T + S} \quad (1.27)$$

avec μ_0 viscosité connue généralement à 273 K.

Les constantes n et S sont déterminées à partir des mesures expérimentales.

Pour l'air, par exemple, $n \simeq 0,7$ et $S = 110$ K.

- la viscosité des liquides diminue avec la température (décroissance exponentielle). La loi s'écrit

$$\ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) = a + b \frac{T_0}{T} + c \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \quad (1.28)$$

avec par exemple pour l'eau :

$$\begin{cases} T_0 &= 273,16 K \\ \mu_0 &= 0,001792 kg/(ms) \\ a &= -1,94 \\ b &= -4,80 \\ c &= 6,74 \end{cases}$$

Chapitre 2

Théorèmes généraux

2.1 Hypothèses de travail

- l'espace est rapporté à des coordonnées cartésiennes
- Représentation eulérienne du milieu fluide
- les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ en un point M du fluide sont :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

2.2 Dérivée particulière (ou dérivée matérielle) d'une fonction scalaire

Soit $f(M, t)$ une fonction scalaire.

Lorsque l'on suit une particule dans son déplacement, on a :

$$\frac{Df(M, t)}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial f(M, t)}{\partial t}}_{\text{termelocal}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f}_{\text{termeconvectif}} \quad (2.1)$$

Ce qui peut s'écrire

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.2)$$

2.3 Dérivée particulière d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{A}(M, t)$ une fonction vectorielle.

Lorsque l'on suit une particule dans son mouvement, on a pour chaque composante A_i :

$$\frac{DA_i}{Dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} A_i$$

En notation indicielle, cette équation s'écrit :

$$\frac{DA_i}{Dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

Sous forme d'écriture vectorielle, on obtient :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{A} \quad (2.3)$$

Si la fonction vectorielle $\vec{A}$ est le vecteur vitesse $\vec{v}$, la dérivée particulière du vecteur vitesse est l'accélération et s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\overrightarrow{rot} \vec{v} \right) \wedge \vec{v} \quad (2.4)$$

2.4 Dérivée d'une intégrale de volume

2.4.1 Cas d'une fonction scalaire

On considère un domaine de fluide à un instant t , $D(t)$, et soit $K(t)$ l'intégrale d'une fonction scalaire volumique $f(M, t)$ attachée à ce domaine.

$$K(t) = \iiint_D f(M, t) dV$$

On montre que la variation de K lorsque l'on suit le domaine est :

$$\frac{DK}{Dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.5)$$

avec

- $\vec{n}$: vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur du volume
- $\vec{v}$: vecteur vitesse de la particule fluide au niveau de la surface de contrôle
- la première intégrale représente la variation, par unité de temps, de la quantité de f contenue dans D considéré comme fixe,
- la seconde intégrale représente le débit de f sortant de S

Ce qui peut s'écrire également en utilisant le théorème d'Ostrogradski (flux-divergence)

$$\frac{DK}{Dt} = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{v}) \right) dV \quad (2.6)$$

Ce résultat est présenté également sous la désignation **théorème du transport pour un volume**.

2.4.2 Cas d'un vecteur

Le théorème de transport pour une grandeur vectorielle $\vec{b}$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_D \vec{b} dV = \iiint_D \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} dV + \iint_S \vec{b} \vec{v} \cdot \vec{n} dS} \quad (2.7)$$

Chapitre 3

Équations fondamentales de la mécanique des fluides

3.1 Équation de conservation de la masse

3.1.1 Énoncé du principe

La masse M d'un domaine D de fluide reste constante c'est à dire que

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (3.1)$$

La masse du domaine D s'écrit

$$M = \iiint_D \rho dV \quad (3.2)$$

D'après l'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, on a

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV \quad (3.3)$$

Le domaine D étant quelconque, on en déduit que, en tout point M du fluide, on a la relation :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (3.4)$$

L'équation 3.4 est **l'équation locale de conservation de la masse** ou encore **l'équation de continuité**

Le terme $\text{div}(\rho \vec{v})$ s'écrit aussi :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad} \rho}$$

En utilisant cette expression dans l'équation 3.4, on obtient

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (3.5)$$

3.1.2 Équation intégrée

Équation

La dérivée particulaire de la masse M du domaine D peut s'écrire :

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (3.6)$$

La dérivée particulière de M est nulle d'où

$$\boxed{\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (3.7)$$

La première intégrale représente la variation pendant le temps dt de la masse de fluide contenue dans D délimité par une surface de contrôle fixe.

La seconde intégrale représente la somme des débits massiques de fluide entrant et sortant à travers la surface de contrôle.

Cas de l'écoulement permanent

Dans ce cas, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, et donc

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.8)$$

Ce qui s'énonce : la somme des débits massiques qui sortent d'une surface fermée fixe tracée dans le fluide est nulle.

3.2 Équations des quantités de mouvement

3.2.1 Énoncé du principe

Le référentiel est galiléen et O est son origine.

La dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement est égal au tenseur des forces extérieures appliquées au domaine D (forces de volume et forces de surface).

On note $\vec{F}$ la densité volumique de forces de volume.

L'égalité entre les tenseurs se traduit par deux égalités vectorielles :

— l'égalité entre les résultantes générales des tenseurs (équations de la dynamique)

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{v} dV = \iiint_D \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{T} dS \quad (3.9)$$

— l'égalité entre les moments résultants des tenseurs (équations des moments)

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{v} dV = \iiint_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{T} dS \quad (3.10)$$

3.2.2 Équations dynamiques ponctuelles

La projection de l'équation 3.9 sur les axes donnent les trois équations :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho u_i dV = \iiint_D \rho F_i dV + \iint_S T_i dS \quad (3.11)$$

Le terme à gauche de l'égalité s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho u_i dV = \iiint_D \rho \frac{Du_i}{Dt} dV \quad (3.12)$$

Le terme relatif aux efforts de surface s'écrit :

$$\iint_S T_i dS = \iint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (3.13)$$

L'équation 3.11 s'écrit donc :

$$\iiint_D \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \iiint_D \rho F_i dV + \iiint_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (3.14)$$

Le domaine D est arbitraire d'où :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.15)$$

Quand les forces de volume dérivent d'un potentiel U, on a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}U}$$

donc

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Lorsque le fluide est newtonien, le terme σ_{ij} du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Donc

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

Le terme $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ représente les forces de viscosité volumique ; on le note f_i .

On obtient donc l'équation vectorielle

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{a} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}U} - \overrightarrow{\text{grad}p} + \vec{f}} \quad (3.17)$$

Lorsque la force de pesanteur est la seule force de volume, l'équation précédente s'écrit

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}p} + \vec{f}} \quad (3.18)$$

Au deuxième membre figurent des forces volumiques dont les unités sont le N/m^3 .

3.3 Les équations de Navier-Stokes

3.3.1 Équations de la dynamique des fluides visqueux

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} dépend linéairement des taux de déformation.

On a la relation

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \eta e\delta_{ij} \quad (3.19)$$

avec e le taux de dilatation volumique .

On remplace τ_{ij} dans l'équation 3.18 par l'expression 3.19.

On obtient alors les équations :

$$\rho \frac{Du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial x} \quad (3.20)$$

$$\rho \frac{Dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial y} \quad (3.21)$$

$$\rho \frac{Dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial z} \quad (3.22)$$

Ce sont les équations de la dynamique des fluides visqueux écrites en coordonnées cartésiennes

3.3.2 Équations des fluides visqueux incompressibles : équations de Navier-Stokes

Lorsque le fluide est incompressible, le taux de dilatation cubique est nul. Les équations s'écrivent alors :

$$\rho \frac{Du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (3.23)$$

$$\rho \frac{Dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \quad (3.24)$$

$$\rho \frac{Dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \quad (3.25)$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes sous forme cartésienne.

3.4 Équation intégrée du théorème des quantités de mouvement

Dans l'équation 3.12, on utilise le théorème de Reynolds pour exprimer la dérivée matérielle de la quantité de mouvement.

On a donc

$$\boxed{\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{v} dV = \iiint_D \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS} \quad (3.26)$$

Ce qui donne

$$\boxed{\iiint_D \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = m \vec{g} - \iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS} \quad (3.27)$$

3.5 Théorème de l'énergie cinétique

3.5.1 Principe

On reprend les équations de la dynamique

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

On les multiplie par u_i et on ajoute les trois équations membre à membre ce qui donne

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho u_i F_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Ce qui peut s'écrire

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho u_i F_i + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

On intègre ensuite sur un domaine D

$$\iiint_D \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV = \iiint_D \rho u_i F_i dV + \iiint_D \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV - \iiint_D \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.28)$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) dV = \iiint_D \rho u_i F_i dV + \iiint_D \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV - \iiint_D \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV} \quad (3.29)$$

Le premier membre correspond à la dérivée de l'énergie cinétique du domaine D

La signification des différents termes du second membre est :

- le terme $\iiint_D \rho u_i F_i dV$ est la puissance des forces de volume, notée P_V
- le terme

$$\iiint_D \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iint_S u_i \sigma_{ij} n_j dS$$

représente la puissance des forces de surface, notée P_S

La somme de la puissance des forces de volume et de la puissance des forces de surface est égale à la puissance des forces extérieures, notée P_e

- le terme $-\iiint_D \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$ représente la puissance des forces intérieures P_i

3.5.2 Détermination de la puissance des forces de volume P_v

On a :

$$P_v = \iiint_D \rho u_i F_i dV = \iiint_D \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV$$

Lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel U, on peut écrire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

La puissance des forces de volume s'écrit donc :

$$P_v = - \iiint_D \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U dV$$

D'après l'expression de la dérivée particulaire d'une fonction, on peut écrire :

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U$$

Comme le potentiel ne dépend pas du temps, l'expression devient

$$\frac{DU}{Dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U$$

La puissance des forces de volume devient alors :

$$\boxed{P_v = - \iiint_D \rho \frac{DU}{Dt} dV = - \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U dV} \quad (3.30)$$

La puissance des forces de volume correspond donc à une diminution, par unité de temps, de l'énergie potentielle du fluide lorsque l'on suit le domaine D dans son déplacement.

3.5.3 Détermination de la puissance des forces de surface

Lorsque la surface S est tracée entièrement dans le fluide, les contraintes σ_{ij} s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

L'expression de P_S s'écrit alors :

$$P_S = - \iint_S p u_i \delta_{ij} n_j dS + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS \quad (3.31)$$

Ce qui donne

$$P_S = - \iint_S p u_i n_i dS + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS \quad (3.32)$$

Ce qui peut s'écrire

$$P_S = - \iint_S p \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS \quad (3.33)$$

Ou encore

$$P_S = - \iint_S p V_n dS + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS \quad (3.34)$$

Le terme P_S a donc deux composantes :

- une composante due à la puissance des forces de pression statique,
- une composante due à la puissance des forces de viscosité

On remarque que les parois solides fixes n'apportent aucune contribution à la puissance des forces de surface car

- $V_n = 0$,
- $u_i = 0$.

3.5.4 Détermination de la puissance des forces intérieures

La puissance des forces intérieures $P_i = - \iiint_D \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$ s'écrit en utilisant l'expression de la contrainte σ_{ij} :

$$P_i = + \iiint_D p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \iiint_D \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.35)$$

Ce qui donne

$$P_i = + \iiint_D p \text{div} \vec{v} dV - \iiint_D \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (3.36)$$

On pose

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.37)$$

Φ est une fonction positive ; elle est nommée fonction de dissipation (fonction de Rayleigh).

L'intégrale $\iiint_D \Phi dV$ représente la puissance dissipée par frottement visqueux dans tout le domaine intérieur D .

3.5.5 Écriture définitive du théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique (3.29) s'écrit donc :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) dV = -\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U dV - \iint_S p V_n dS + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS + \iiint_D p \operatorname{div} \vec{v} dV - \iiint_D \Phi dV \quad (3.38)$$

Ou encore

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) dV = - \iint_S p V_n dS + \iiint_D p \operatorname{div} \vec{v} dV + \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS - \iiint_D \Phi dV \quad (3.39)$$

Le premier terme peut s'écrire en utilisant la dérivée particulaire d'une intégrale

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) dV = \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \operatorname{div} \left[\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) \vec{v} \right] \right] dV$$

Ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \operatorname{div} \left[\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) \vec{v} \right] \right] dV &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) dV \\ &+ \iint_S \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) v_i n_i dS \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \operatorname{div} \left[\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) \vec{v} \right] \right] dV &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) dV \\ &+ \iint_S \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) v_n dS \end{aligned} \quad (3.41)$$

En injectant cette expression dans l'expression du théorème de l'énergie cinétique (3.39), on obtient

$$\boxed{\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) dV + \iint_S \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U + p \right) v_n dS = \iiint_D p \operatorname{div} \vec{v} dV - P_\mu} \quad (3.42)$$

avec

$$P_\mu = - \iint_S u_i \tau_{ij} n_j dS + \iiint_D \Phi dV \quad (3.43)$$

Ce terme correspond à la puissance totale dissipée par viscosité.

L'équation 3.42 est dénommée **Formule de Cotton - Fortier** ou **Formule de Bernoulli généralisée**

Chapitre 4

Théorème de Bernoulli

4.1 Rappel des équations de la dynamique

Lorsque les seules forces de volume sont les forces de pesanteur, on a vu que pour un fluide, l'équation dynamique ponctuelle s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} p + \vec{f}} \quad (4.1)$$

avec $\vec{f}$ densité volumique des forces de viscosité

4.2 Cas des fluides parfaits, barotropes ou incompressibles

4.2.1 Équation dynamique ponctuelle

La densité volumique des forces de viscosité est alors nulle.

L'équation ponctuelle de la dynamique s'écrit donc :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} p \quad (4.2)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p \quad (4.3)$$

En utilisant l'expression de l'accélération

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\overrightarrow{rot} \vec{v} \right) \wedge \vec{v} \quad (4.4)$$

On obtient

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\overrightarrow{rot} \vec{v} \right) \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p \quad (4.5)$$

Par définition, un fluide est barotrope lorsque la masse volumique est fonction de la pression.

Ainsi pour un gaz parfait barotrope, on a $\frac{p}{\rho^n} = Cte$.

- l'isotherme correspond à $n = 1$
- l'adiabatique correspond à $n = \gamma$

Les fluides incompressibles homogènes pour lesquels $\rho = cte$ sont aussi des cas particuliers de fluides barotropes.

Lorsque le fluide est barotrope, on peut introduire la fonction P définie par

$$P = \int \frac{dp}{\rho}$$

On a les relations $dP = \frac{dp}{\rho}$ et $\overrightarrow{grad} P = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p$

Lorsque $\rho = cte$, la fonction P s'écrit $P = \frac{p}{\rho}$

D'autre part, on peut écrire le vecteur intensité de la pesanteur $\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(gz)$ L'équation dynamique ponctuelle peut donc s'écrire ;

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + gz \right) + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (4.6)$$

On note $E_m = \frac{v^2}{2} + P + gz$. Elle représente une énergie mécanique de l'unité de masse du fluide.

L'équation dynamique ponctuelle peut donc s'écrire ;

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(E_m) + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (4.7)$$

4.2.2 Intégration de l'équation dynamique ponctuelle

Cas où l'écoulement est permanent

On a alors $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

L'équation dynamique devient

$$\overrightarrow{grad}(E_m) + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (4.8)$$

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(E_m)$ est donc perpendiculaire à chaque instant aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{rot} \vec{v}$. Il est perpendiculaire aux lignes de courant et aux lignes tourbillon.

Par conséquent, la quantité E_m est constante le long des lignes de courant et le long des lignes tourbillon.

Ce qui s'écrit

$$\frac{v^2}{2} + P + gz = cte \quad (4.9)$$

sur les lignes de courant et les lignes tourbillon

L'écoulement est permanent et irrotationnel

L'équation dynamique devient

$$\overrightarrow{grad}(E_m) = \vec{0} \quad (4.10)$$

On a donc E_m constant dans tout le fluide.

Ce qui s'écrit

$$\frac{v^2}{2} + P + gz = cte \quad (4.11)$$

dans tout le fluide.

L'écoulement est permanent et type Beltrami-Gromeka

De tels écoulements vérifient : $\vec{rot}\vec{v}$ et $\vec{v}$ sont parallèles

L'équation dynamique devient

$$\vec{grad}(E_m) = \vec{0} \quad (4.12)$$

On a donc E_m constant dans tout le fluide.

Ce qui s'écrit

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + P + gz = cte} \quad (4.13)$$

dans tout le fluide.

4.2.3 Cas des écoulements de fluides incompressibles homogènes

On a donc $\rho = Cte$. L'équation 4.9 s'écrit donc

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cte} \quad (4.14)$$

C'est **la relation de Bernoulli** ; elle traduit la conservation de l'énergie mécanique totale de l'unité de masse le long des lignes de courant ou le long des lignes de tourbillon.

4.2.4 Charge

On définit la charge d'un fluide, notée H par la relation

$$\boxed{H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}} \quad (4.15)$$

La dimension de cette grandeur est le mètre.

Dans le cas d'un fluide parfait incompressible en écoulement permanent, on constate que la charge se conserve.

4.3 Cas des fluides visqueux incompressibles - Théorème de Bernoulli généralisé

4.3.1 Hypothèses

- Les écoulements seront considérés comme unidimensionnels.
- on considère des écoulements dans des canalisations de sections réduites. Dans celles-ci, les pression, position et vitesse varient faiblement. On prendra les valeurs des pression, vitesse et position aux centres de ces sections.

Ainsi le théorème de Bernoulli appliqué à l'écoulement dans une canalisation s'écrit :

$$\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)_2 \quad (4.16)$$

Dans le cas d'un fluide visqueux, du fait des forces de frottement non nulles, l'énergie mécanique du fluide diminue dans le sens de l'écoulement dans la canalisation.

Cette diminution se traduit par une diminution de la charge.

Généralement, on écrit

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_2 = \frac{e_r}{g} = h_r \quad (4.17)$$

La quantité h_r est homogène à une hauteur et e_r a la dimension d' une énergie massique.

Dans les installations, le fluide s'écoule dans des conduites régulières mais également dans des **singularités** comme par exemple des coudes, des raccords, des élargissements ou des contractions .

Ces différents éléments contribuent à la diminution de l'énergie du fluide. On parle de **pertes de charges singulières**. L'équation 4.17 s'écrit alors :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_2 = \frac{e_r}{g} + \frac{e_s}{g} = h_r + h_s \quad (4.18)$$

4.3.2 Théorème de Bernoulli généralisé

On considère maintenant une installation avec une machine soit réceptrice comme une turbine ou motrice comme une pompe.

La machine réceptrice absorbe une partie de l'énergie du fluide alors que la machine motrice fournit de l'énergie au fluide.

On note w_t le travail apporté à l'unité de masse du fluide.

On alors l'équation :

$$\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right)_1 = -e_r - e_s + w_t = -gh_r - gh_s \quad (4.19)$$

Cette dernière relation est généralement dénommée : **théorème de Bernoulli généralisé**

Le travail w_t est un travail théorique ; il faut tenir compte du rendement de la pompe ou de la turbine.

— dans le cas d'une pompe, le travail réel massique à fournir est :

$$w_{treel} = \frac{w_t}{\eta} \quad (4.20)$$

— dans le cas d'une turbine, le travail réel massique récupéré est :

$$w_{treel} = \eta w_t \quad (4.21)$$

4.3.3 Formules pour l'expression des pertes de charge régulière

La perte de charge dans une canalisation cylindrique de diamètre D et de longueur L est proportionnelle à v_m^2 avec v_m vitesse moyenne débitante.

On a la relation :

$$h_r = \frac{e_r}{g} = \Lambda \frac{L}{D} \frac{v_m^2}{2g} \quad (4.22)$$

Le coefficient Λ est appelé **coefficient de perte de charge**.

Ce coefficient de perte de charge dépend principalement :

— du nombre de Reynolds $Re = \frac{v_m D}{\nu}$

- du coefficient de rugosité relative $\frac{\varepsilon}{D}$

On dispose d'expressions analytiques du coefficient de perte de charge en fonction du régime d'écoulement.

- Le régime est laminaire - $Re < 2000$

Le coefficient de perte de charge est le même quelle que soit la rugosité. Son expression est donnée par l'équation 4.23

$$\Lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.23)$$

- Pour les **conduites lisses** et un nombre de Reynolds inférieur à 10^5 et supérieur à 4000, on peut utiliser la formule de Blasius 4.24

$$\Lambda = \frac{0,316}{Re^{\frac{1}{4}}} \quad (4.24)$$

- Pour les conduites lisses et les nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 , la formule de Von Karman et Nikuradse (équation 4.25) est adaptée

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \log_{10} \left(Re \sqrt{\Lambda} \right) - 0,8 \quad (4.25)$$

- Pour la région de transition ($2000 < Re < 4000$) et des conduites rugueuses, c'est la formule de Colebrook (équation 4.26) qui est le plus souvent utilisée.

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\Lambda}} \right) \quad (4.26)$$

Les deux dernières expressions ne donnent pas le coefficient Λ de manière explicite ; il faut faire une résolution numérique.

4.3.4 Canalisations industrielles - Diagramme de Moody

Une étude détaillée des pertes de charge dans les conduites industrielles a été réalisée par l'ingénieur et professeur d'hydraulique Lewis Ferry Moody.

Il a réalisé un diagramme, dénommé **diagramme de Moody**, qui permet de déterminer graphiquement le coefficient de perte de charge Λ en fonction de la rugosité relative de la paroi $\frac{\varepsilon}{D}$ et du nombre de Reynolds (cf. figure 4.1)

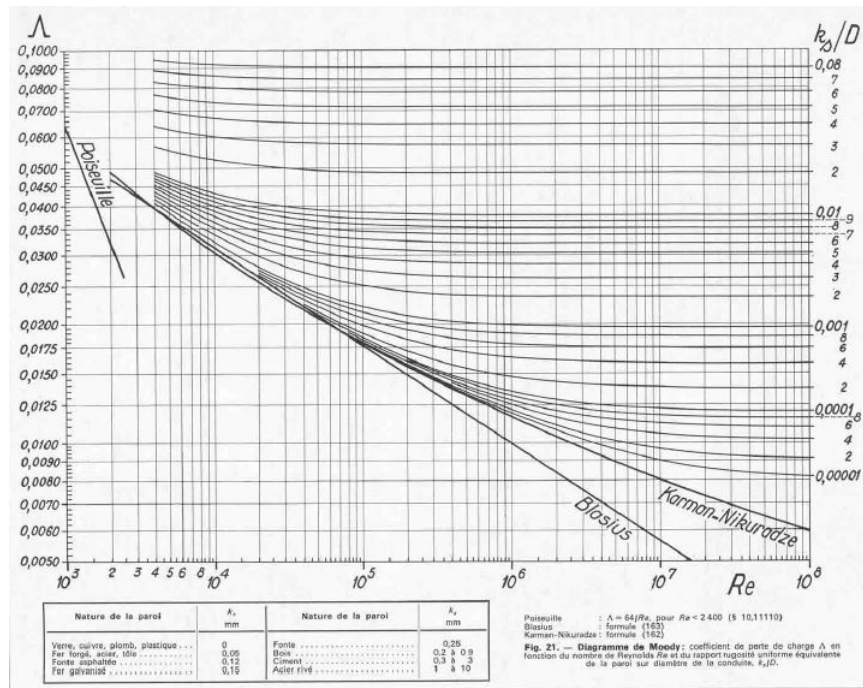


FIGURE 4.1 – Diagramme de Moody

4.3.5 Cas des pertes de charge singulières

Expression de la perte de charge singulière

Les grandeurs e_s ou h_s sont également proportionnelles à la vitesse moyenne débitante v_m . Par convention, la vitesse v_m est calculée sur la section du conduit, en amont de la singularité.

On a les expressions

$$e_s = k \frac{v_m^2}{2} \quad (4.27)$$

ou

$$h_s = k \frac{v_m^2}{2g} \quad (4.28)$$

Le coefficient k dépend de chaque type de singularité, est déterminé expérimentalement ou calculé numériquement.

Sur la figure 4.2 sont indiqués quelques exemples d'expression du coefficient k .

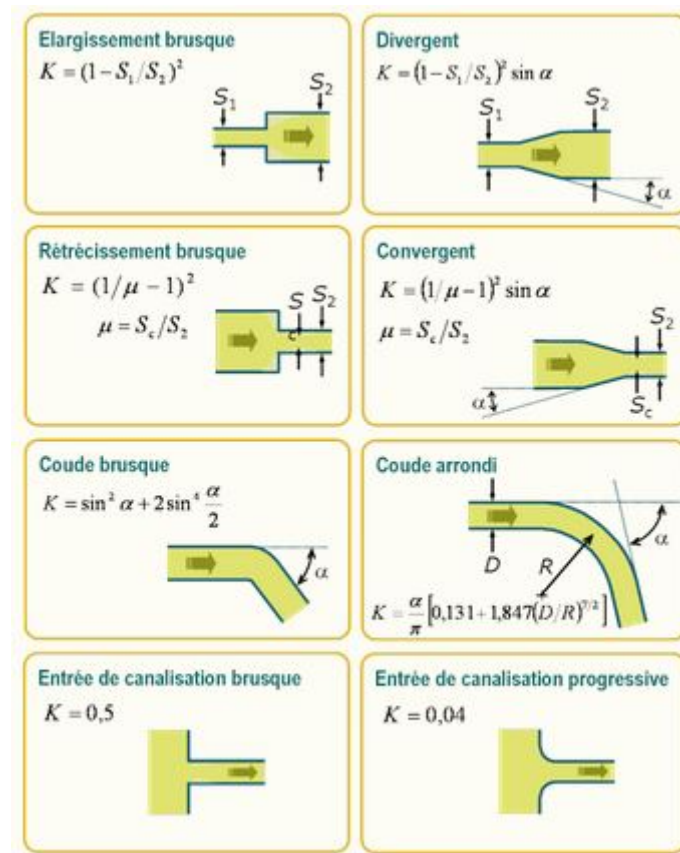


FIGURE 4.2 – Expressions du coefficient k

Chapitre 5

Écoulements mono-dimensionnels des fluides compressibles

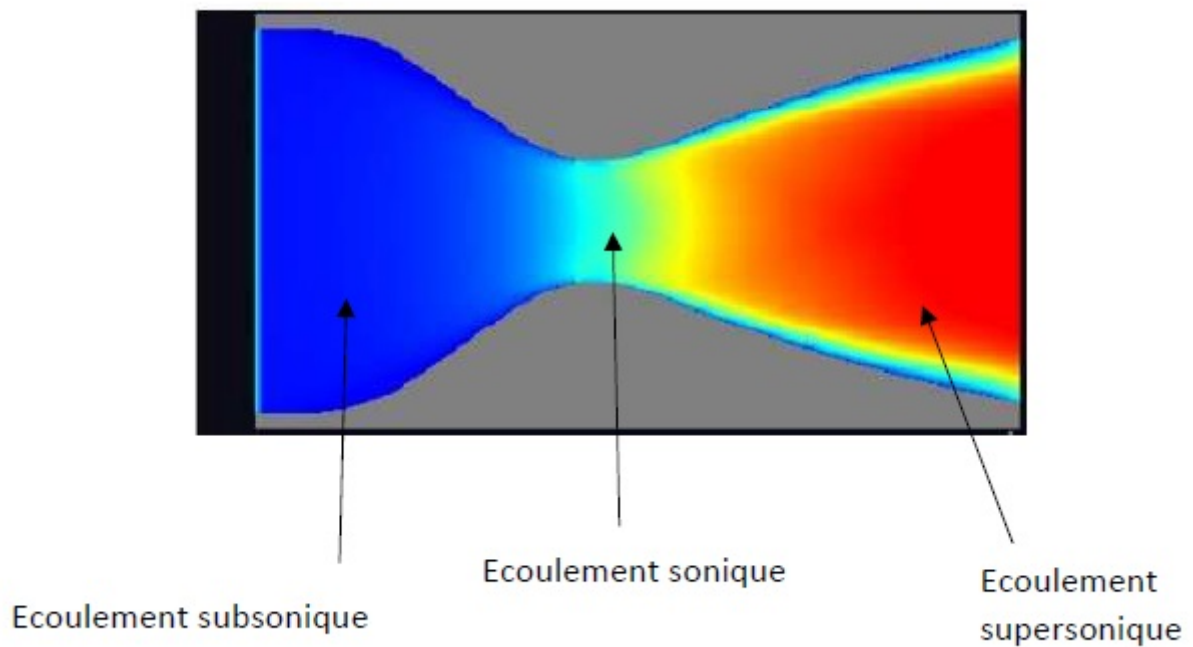


FIGURE 5.1 – Simulation du nombre de Mach dans une tuyère de Laval

5.1 Étude générale de l'écoulement

cf texte article de l'ingénieur

La connaissance de l'écoulement sur le plan cinématique se réduit alors à la détermination de la valeur v_p (vitesse principale) de la vitesse en fonction de l'abscisse curviligne s .

On a un problème d'écoulement monodimensionnel dans lequel on fait l'hypothèse que tous les autres paramètres physiques du fluide ne dépendent que de s .

La composante principale est notée v dans la suite.

5.1.1 Équations de base de l'écoulement

Rappel des hypothèses

- l'écoulement est conservatif (pas de source, ni puits de courant),
- l'écoulement est stationnaire,
- l'écoulement est dans un tube de courant.

Équation de continuité

On note Ω_1 et Ω_2 les sections planes perpendiculaires à la ligne moyenne. Elles sont appelées également sections droites.

On note v_i la composante du vecteur vitesse selon la normale à chacune de ces sections.

On a la relation

$$\boxed{\rho_1 v_1 \Omega_1 = \rho_2 v_2 \Omega_2 = q_m} \quad (5.1)$$

avec q_m débit massique du fluide dans l'écoulement.

L'équation 5.1 peut s'écrire

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\Omega}{\Omega} = 0} \quad (5.2)$$

Bilan de quantité de mouvement

Les forces considérées sont classiquement :

- celles dues à la pression,
- celles dues à la pesanteur,
- celles dues à la viscosité.

On note $\vec{f}$ la force visqueuse par unité de masse.

L'équation de la dynamique s'écrit donc ;

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) - \rho g \overrightarrow{grad}(z) + \rho \vec{f} \quad (5.3)$$

Pour un écoulement mono-dimensionnel, et permanent, en multipliant scalairement les deux membres de l'équation par le vecteur élémentaire $\vec{ds}$, on obtient l'équation :

$$\boxed{v dv + \frac{dp}{\rho} + g dz = -f ds} \quad (5.4)$$

Équation de l'énergie cinétique ou équation énergétique mécanique

Si on intègre l'équation 5.4 entre les points 1 et 2 d'une même ligne de courant, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \Delta ec_{12} + \Delta ep_{12} + \tau_{12} = 0 \quad (5.5)$$

C'est une équation énergétique massique dite **équation de l'énergie cinétique** ou encore **équation énergétique mécanique**.

Elle ne fait apparaître que des énergies de type mécanique :

- e_c énergie cinétique massique et e_p énergie potentielle de pesanteur,
- énergie de pression p
- τ_{12} est l'opposé du travail des forces de frottement par unité de masse. τ_{12} est toujours positif. Il correspond à la transformation d'énergie mécanique en énergie thermique.

Si un élément mobile d'une machine (arbre de turbine, piston, etc) se trouve entre les points 1 et 2, on a l'équation suivante

$$wt_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \Delta e_{c12} + \Delta e_{p12} + \tau_{12} \quad (5.6)$$

Ou encore

$$wt_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + \tau_{12} \quad (5.7)$$

avec wt_{12} énergie reçue par unité de masse du fluide lors de son contact au cours du déplacement avec l'élément de machine. On la nomme travail technique.

Équation de l'énergie ou équation énergétique thermodynamique

Il s'agit de l'expression du premier principe de la thermodynamique en systèmes ouverts. Elle s'écrit :

$$wt_{12} + qe_{12} = \Delta h_{12} + \Delta e_{c12} + \Delta e_{p12} \quad (5.8)$$

avec qe_{12} quantité de chaleur échangée entre l'unité de masse du fluide et le milieu extérieur. L'équation 5.8 peut s'écrire en utilisant l'enthalpie totale h_t

$$wt_{12} + qe_{12} = \Delta h_{t12} \quad (5.9)$$

Équation d'état du fluide

Il s'agit de l'équation d'état thermodynamique d'un fluide. Elle a une expression simple dans le cas où l'on considère le fluide comme un gaz parfait. Elle s'écrit :

$$pv = \frac{p}{\rho} = rT \quad (5.10)$$

avec $r = \frac{R}{M}$ où

- $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol.K})$
- M : masse molaire du gaz

5.1.2 Vitesse du son dans un fluide quelconque

Le son est produit par des variations faibles de pression du milieu dans lequel il se propage. La vitesse du son correspond à la propagation de ces variations de pression.

On considère une onde sonore qui se déplace de la gauche vers la droite à la vitesse v_s . On observe donc une différence de pression dp entre la partie droite 1 et la partie gauche 2 du milieu fluide.

Si on considère le mouvement relatif du fluide par rapport à l'onde sonore, le fluide se déplace également à la vitesse v_s mais dans le sens opposé.

En appliquant l'équation de continuité, on obtient

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv_s}{v_s} = 0 \quad (5.11)$$

Compte tenu de la valeur infiniment petite de l'épaisseur du front d'onde, on admet que la traversée de l'onde de pression s'effectue sans frottement. On admet aussi que le phénomène est adiabatique. Elle s'effectue de manière réversible. On néglige également la pesanteur

En utilisant l'équation 5.4, on obtient :

$$\frac{dp}{\rho} + v_s dv_s = 0 \quad (5.12)$$

La combinaison des équations 5.11 et 5.12 donne :

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} \quad (5.13)$$

Pour un gaz parfait, une évolution adiabatique réversible entraîne la relation $p \frac{1}{\rho^\gamma} = cte$.

La vitesse du son a alors l'expression

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (5.14)$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, la vitesse du son s'exprime sous la forme :

$$v_s = \sqrt{\gamma r T} \quad (5.15)$$

5.2 Étude de l'écoulement isentropique d'un gaz parfait

5.2.1 Écoulement adiabatique d'un fluide non pesant

Lorsqu'il n'y a pas d'échanges thermiques et que les énergies liées à la pesanteur sont négligées, l'équation énergétique thermodynamique 5.8 s'écrit

$$\Delta h_{12} + \Delta e_{c12} = 0 \quad (5.16)$$

Ce qui peut s'écrire

$$h + \frac{v^2}{2} = cte \quad (5.17)$$

Cette équation est appelée **équation de Zeuner**. Elle est valable en écoulement réversible comme irréversible.

5.2.2 Étude générale de l'écoulement

Système d'équations

Le fluide est un gaz parfait et l'écoulement est isentropique, on dispose du système d'équations

$$\begin{aligned} \rho v \Omega &= cte \\ h + \frac{v^2}{2} &= cte \\ \frac{p}{\rho} &= rT \\ h &= c_p T + cte \\ \frac{p}{\rho^\gamma} &= cte \end{aligned} \quad (5.18)$$

Vitesse de l'écoulement

On considère une veine d'écoulement quelconque, une section de référence amont 1 et une section de référence aval 2 quelconques.

D'après l'équation de Zeuner, on a

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -\Delta h_{12} = -c_p (T_2 - T_1) \quad (5.19)$$

On note $\delta = \frac{p_2}{p_1}$ le taux de détente et $a = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$
5.19 s'écrit

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = c_p T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (5.20)$$

Or $\frac{T_2}{T_1} = \delta^a$ d'où

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = c_p T_1 (1 - \delta^a) \quad (5.21)$$

En utilisant la relation de Mayer, on peut écrire $c_p = \frac{r}{a}$ donc l'équation précédente s'écrit

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{r}{a} T_1 (1 - \delta^a) \quad (5.22)$$

On en déduit l'expression de la vitesse aval v_2

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 * \frac{r}{a} T_1 (1 - \delta^a)} \quad (5.23)$$

Cette équation est l'équation de **Barré de Saint-Venant**.

Elle indique que la vitesse aval dépend :

- des conditions amont (vitesse, température),
- du taux de détente,
- de la nature du fluide

État générateur - Point d'arrêt

Lorsque la section amont a une aire infinie, la vitesse d'écoulement est nulle dans cette section.

Les grandeurs p et T relatives à cette section sont notées p_0 et T_0 . Par définition, cet état est **l'état générateur du fluide s'écoulant isentropiquement** depuis la section amont jusqu'à une section où le fluide a la vitesse v , la pression p et la température T .

Le taux de détente $\delta_0 = \frac{p}{p_0}$ est le taux de détente générateur de l'écoulement.

La vitesse v dans une section quelconque aval s'écrit :

$$v = \sqrt{2 * \frac{r}{a} T_0 (1 - \delta_0^a)} \quad (5.24)$$

Inversement on peut déterminer les conditions génératrices à partir des conditions de l'écoulement dans la section où le fluide s'écoule à la vitesse v , à la pression p et à la température T . On trouve pour la pression génératrice p_0 l'expression :

$$p_0 = p \left(1 + \frac{v^2}{2c_p T} \right)^{\frac{1}{a}} \quad (5.25)$$

De même la température génératrice T_0 a pour expression :

$$T_0 = T \left(1 + \frac{v^2}{2c_p T} \right) \quad (5.26)$$

La masse volumique de l'état générateur s'écrit :

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{v^2}{2c_p T} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (5.27)$$

L'état générateur sert de référence dans tous les écoulements de gaz parfaits, isentropiques ou non.

Dans le cas d'un écoulement non isentropique, cet état est un état amont hypothétique.

La représentation dans un diagramme T - s est indiquée sur la figure 5.2. On met ainsi en

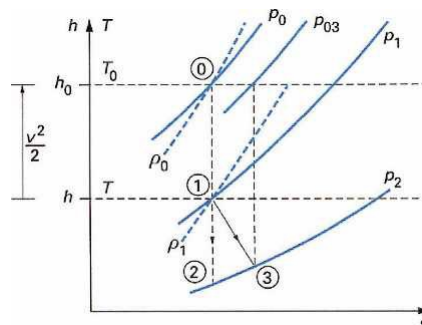


FIGURE 5.2 – Représentation de l'état générateur d'un gaz parfait dans un diagramme T - s -
©Techniques de l'ingénieur

évidence l'énergie cinétique à partir de l'équation de Zeuner

$$\frac{v^2}{2} = h_0 - h \quad (5.28)$$

Et inversement l'enthalpie de l'état générateur h_0 s'obtient à partir de :

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \quad (5.29)$$

Lorsque l'évolution est isentropique (adiabatique et réversible) l'état générateur reste le même.

Si l'écoulement est irréversible (écoulement de 2 à 3),et adiabatique, on peut montrer (cf. TD) que les températures génératrices sont constantes $T_{01} = T_{03}$ alors que les pressions génératrices évoluent $p_{01} > p_{03}$

On peut également exprimer les pression, température et masses volumiques génératrices en fonction du nombre de Mach (Ma).

En utilisant l'expression de la célérité du son (cf. 5.15) et les expressions 5.25 et 5.26 on obtient :

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\gamma}} = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (5.30)$$

et

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \quad (5.31)$$

et

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (5.32)$$

L'étude de ces fonctions (cf.TD.) montre que pour les écoulements subsoniques ($Ma < 1$), les conditions génératrices sont proches de l'état du fluide en écoulement lorsque le nombre de Mach est inférieur à 0,3.

De même la compressibilité du fluide est négligeable tant que l'écoulement reste nettement subsonique ($Ma < 0.5$)

Vitesse de détente dans le vide

En utilisant l'expression 5.24, on trouve

$$v = \sqrt{2 * \frac{r}{a} T_0} = \sqrt{2 c_p T_0} \quad (5.33)$$

Cette vitesse est maximale et elle est notée v_{max} .

Elle est indépendante de la pression génératrice ; elle ne dépend que de la température et de la nature du gaz.

On peut la comparer à la vitesse du son dans le gaz à la température T_0 , notée vs_0 .

On a la relation :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} v_{s0} \quad (5.34)$$

5.2.3 Particularités de l'écoulement

Évolution de la section droite en fonction de la pression

La référence amont est prise égale à l'état générateur ($\Omega_0 \rightarrow \infty$).

Le débit massique q_m étant constant, la section Ω est proportionnelle au rapport $\frac{1}{\rho v}$.

On étudie donc séparément l'évolution de ces deux paramètres avec la pression p .

— Évolution de la masse volumique avec la pression

En utilisant l'équation 5.27, on obtient la relation

$$\rho = \rho_0 \delta_0^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.35)$$

La masse volumique varie donc de la valeur maximale ρ_0 pour $p = p_0$ à 0 pour $p = 0$.

— Évolution de la vitesse avec la pression

En utilisant les relations 5.24 et l'expression de la vitesse maximale, on obtient la relation :

$$v = v_{max} \sqrt{1 - \delta_0^a} \quad (5.36)$$

L'étude mathématique de la fonction montre que la vitesse v est décroissante avec δ_0 .

Elle est nulle dans l'état générateur $\delta_0 = 1$ et maximale pour $\delta_0 = 0$.

L'étude de la dérivée indique la présence d'un point d'inflexion i .

5.3 Écoulement unidimensionnel dans une tuyère

5.3.1 Rappel des hypothèses et de l'objectif de la tuyère

- Le fluide est compressible et contenu dans un réservoir sous pression,
- L'objectif est de rechercher la forme optimale de la canalisation de décharge du réservoir pour transformer l'énergie interne en énergie cinétique,
- L'écoulement est supposé unidimensionnel et permanent,
- Les forces de viscosité sont négligées,
- L'écoulement se fait le long de l'axe x de la tuyère

5.3.2 Relation de Hugoniot

Démonstration

A partir de l'équation de continuité, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\rho}{\rho} + \frac{\Omega}{\Omega} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (5.37)$$

De même à partir de l'équation de la dynamique (ou bilan de quantité de mouvement), on obtient l'équation différentielle :

$$v dv + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (5.38)$$

On rappelle l'expression de la célérité du son :

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} \quad (5.39)$$

Cette dernière relation permet d'écrire pour un écoulement isentropique

$$d\rho = \frac{dp}{v_s^2} \quad (5.40)$$

En combinant les équations 5.37, 5.38 et 5.40, on obtient l'équation

$$-v dv \frac{1}{v_s^2} + \frac{\Omega}{\omega} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (5.41)$$

Ce qui peut s'écrire en utilisant le nombre de Mach, Ma :

$$\frac{dv}{v} (1 - Ma^2) + \frac{\Omega}{\Omega} = 0 \quad (5.42)$$

Enfin, cette dernière équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dv}{v} (Ma^2 - 1)} \quad (5.43)$$

C'est la **relation de Hugoniot**

Conséquences

- L'écoulement est subsonique ($Ma < 1$)
La vitesse augmente ($dv > 0$) si la section de la tuyère diminue ($d\Omega < 0$).
- L'écoulement est supersonique ($Ma > 1$)
La vitesse augmente ($dv > 0$) si la section de la tuyère augmente ($d\Omega > 0$).
- La canalisation de décharge aura donc la forme suivante. Elle sera d'abord convergente tant que la vitesse d'écoulement sera inférieure à la célérité locale du son puis lorsque la vitesse d'écoulement sera supérieure à la célérité locale du son, elle sera divergente.
La section de la tuyère passe donc par un col : **le col de la tuyère**. Au col de la tuyère ($d\Omega = 0$), $dv > 0$, donc $Ma = 1$. Une telle tuyère est dénommée **tuyère de Laval**
Au col $v = v_c = v_{sc}$
La section au col est la **section critique** et le régime au col est **le régime critique**.
Le taux de détente $\delta_{0c} = \frac{p_c}{p_0}$ est le taux de détente critique.
La pression p_c est la pression critique.

Cas des écoulements entièrement subsoniques dans une tuyère

La condition au col $d\Omega = 0$ entraîne $dv = 0$.

La vitesse passe donc par un maximum au col car l'écoulement n'est pas sonique au col.

D'après l'équation de la dynamique ($v dv = -\frac{dp}{\rho}$) $dv = 0$ entraîne $dp = 0$; la pression passe par un minimum au col.

De même l'équation différentielle de continuité (cf. équation 5.37) entraîne au col ($d\Omega = 0$ et $dv = 0$) $d\rho = 0$. Au col, la masse volumique passe par un minimum.

5.3.3 Divers régimes de fonctionnement d'une tuyère

Présentation

On considère que la pression amont p_0 est maintenue constante et la pression aval p_a variable.

La pression dans la section d'éjection, différente de p_a pour certains régimes de fonctionnement est notée p_e .

On fait décroître progressivement la pression aval p_a de p_0 à p_{atm} .

On suppose pour simplifier que la vitesse est négligeable à l'entrée de la tuyère.

Tant que la différence $p_0 - p_a$ est faible, l'écoulement est subsonique dans toute la tuyère : la vitesse atteint son maximum au col, la pression atteint son minimum (courbes α).

Dans la section d'éjection $p_e = p_a$.

Si l'on diminue p_a , la pression s'abaisse en tout point de la tuyère avec augmentation corrélative de la vitesse et toujours un maximum au col. L'écoulement reste isentropique dans toute la tuyère. Il est contrôlé par la pression aval p_a . La pression d'arrêt est conservée.

Pour une certaine valeur de p_a , les conditions critiques sont atteintes au col (courbe β).

A partir de cette condition, les modifications de p_a ne peuvent plus remonter le col puisqu'elles se propagent à la célérité du son.

Par conséquent la diminution de p_a n'influencera plus l'écoulement au col et en amont du col.

L'écoulement est uniquement déterminé par les conditions d'entrée : p_0, T_0 .

Le débit massique de la tuyère est alors

$$q_m = \rho_c \Omega_c v_c \quad (5.44)$$

Il devient indépendant de la pression aval. La tuyère est dite **amorcée**. On dit également qu'il y a **blocage**.

Les valeurs atteintes au col ne changeront plus lorsque p_a sera assez faible pour que l'écoulement soit supersonique dans tout le divergent (courbe γ).

Lorsque l'on a $p_e = p_{e'} = p_a$, la tuyère est dite **adaptée à la pression ambiante**.

La détente est isentropique dans toute la tuyère ; la pression génératrice p_0 égale à la pression d'arrêt est toujours conservée.

Pour les pressions ambiantes comprises entre $p_{e'}$ et $p_{e''}$. Il n'y a plus d'écoulement isentropique.

Si on considère une pression d'éjection p_d , elle pourrait être atteinte grâce à un écoulement subsonique d'd.

Une onde de choc (variation brusque de pression et de vitesse) se produit dans la section où la pression est d'.

L'écoulement est supersonique entre le col et la section d' ; il redevient subsonique après l'onde de choc. La vitesse diminue et la pression augmente pour atteindre la pression aval $p - a$.

Au fur et à mesure que la pression aval décroît, le choc recule vers l'aval pour atteindre finalement la section d'éjection lorsque la pression y atteint une valeur $p - f$

Conditions au col lorsque la tuyère est amorcée

Au col, on a $Ma = 1$; à partir des expressions des équations 5.31, 5.30 et 5.32 , on obtient les relations ci-après :

— Rapport des températures :

$$\boxed{\frac{T_c}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}} \quad (5.45)$$

— Rapport des pressions (taux de détente critique) :

$$\boxed{\frac{p_c}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} \quad (5.46)$$

— Rapport des masses volumiques :

$$\boxed{\frac{\rho_c}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \quad (5.47)$$

— Vitesse au col

$$\boxed{\frac{v_c}{vs_0} = \frac{vs_c}{vs_0} = \sqrt{\frac{T_c}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}} \quad (5.48)$$

Pour l'air avec $\gamma = 1,405$, on trouve : $\frac{T_c}{T_0} = 0,833$; $\frac{p_c}{p_0} = 0,528$; $\frac{\rho_c}{\rho_0} = 0,634$; $\frac{v_c}{vs_0} = 0,912$
Le débit massique dans la tuyère amorcée est donc égal à :

$$\boxed{qm_c = \rho_c \Omega_c v_c = p_0 \Omega_c \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\frac{\gamma}{r T_0}}} \quad (5.49)$$

On constate que le débit massique dans la tuyère lorsque celle-ci est amorcée ne dépend que de l'état générateur (p_0, T_0), de la section au col Ω_c et du gaz (γ, r).

On peut ajouter qu'il est directement proportionnel à la pression génératrice p_0 et à la section au col Ω_c .

Pour l'air avec $\gamma = 1,405$, on trouve :

$$qm_c = 0,685 \frac{p_0}{\sqrt{r T_0}} \Omega_c$$

On écrit parfois :

$$qm_c = C_D p_0 \Omega_c \quad (5.50)$$

C_D est appelé **coefficient de décharge**. Son expression est :

$$\boxed{c_D = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\frac{\gamma}{r T_0}}} \quad (5.51)$$

On peut également déterminer le rapport des sections $\frac{\Omega}{\Omega_c}$.

La conservation du débit massique implique que le débit massique dans une section quelconque Ω est égal au débit critique (au col). On a donc la relation suivante :

$$\rho \Omega v = \rho_c \Omega_c v_c \quad (5.52)$$

On en déduit le rapport :

$$\frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{\rho_c}{\rho} \frac{v_c}{v} = \frac{\rho_c}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{v_c}{v} \quad (5.53)$$

En utilisant les expressions 5.47, 5.32, 5.24, on montre que le rapport des sections s'écrit :

$$\boxed{\frac{\Omega}{\Omega_c} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}{Ma} \right]} \quad (5.54)$$

Tables numériques des écoulements permanents de l'air sans onde de choc

A partir des expressions 5.31, 5.30, 5.30 et 5.54, on établit des tables donnant les valeurs numériques des rapports $\frac{\rho}{\rho_0}$, $\frac{p}{p_0}$, $\frac{T}{T_0}$ et $\frac{\Omega}{\Omega_c}$ en fonction du nombre de Mach.

5.4 Tuyère convergente - divergente dans un moteur fusée

5.4.1 Expression de la poussée

Mettre une image d'une tuyère

En utilisant le théorème d'Euler, on obtient la relation ci-après pour la poussée du moteur :

$$\boxed{F = q_m v_e + (p_e - p_a) \Omega_e} \quad (5.55)$$

avec

- v_e vitesse d'éjection,
- p_e pression du gaz au niveau de la sortie d'éjection,
- p_a pression extérieure
- Ω_e section d'éjection

5.4.2 Poussée si la tuyère est adaptée

Expression de la poussée

Lorsque la tuyère est adaptée à la pression extérieure, la pression d'éjection p_e est alors égale à p_a .

La poussée s'écrit alors

$$\boxed{F = qm v_e} \quad (5.56)$$

D'après les expressions de qm et v (cf. équations 5.24 et 5.49), on obtient la relation :

$$F^0 = p_0 \Omega_c \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]} \quad (5.57)$$

Coefficient de poussée

Le coefficient de poussée est défini par le rapport :

$$\boxed{C_F^0 = \frac{F^0}{p_0 \Omega_c}} \quad (5.58)$$

Le coefficient de poussée a donc l'expression

$$C_F^0 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]} \quad (5.59)$$

Le coefficient de poussée C_F^0 dépend du taux de détente $\frac{p_e}{p_0}$ et du gaz.

5.4.3 Tuyère non adaptée

Pour la tuyère non adaptée, la poussée peut s'écrire :

$$F = F^0 + (p_e - p_a) \Omega_e = F^0 + p_0 \left(\frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} \right) \quad (5.60)$$

Le coefficient de poussée a alors l'expression

$$C_F = C_F^0 + \frac{\Omega_e}{\Omega_c} \left(\frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} \right) \quad (5.61)$$

On constate que le coefficient de poussée dépend également du taux de détente dans la section de sortie $\delta_0 = \frac{p_e}{p_0}$.

5.4.4 Rendements pour caractériser l'efficacité d'un propulseur

Puissance utile à la propulsion

On a la relation

$$P_u = F v_F \quad (5.62)$$

avec v_F la vitesse de la fusée

Dans le cas d'une tuyère adaptée, l'équation 5.62 s'écrit :

$$P_u = (q m v_e) v_F \quad (5.63)$$

5.4.5 Puissance perdue

Il s'agit de la puissance cinétique absolue du jet.

Elle s'écrit

$$P_P = q m \frac{v_a^2}{2} = q m \frac{(v_e - v_F)^2}{2} \quad (5.64)$$

5.4.6 Puissance disponible

La puissance disponible est

$$P_d = P_u + P_P = q m \frac{v_e^2 + v_F^2}{2} \quad (5.65)$$

5.4.7 Rendement de propulsion

Son expression est :

$$\eta_P = \frac{P_u}{P_d} = \frac{2 \frac{V_F}{v_e}}{1 + \left(\frac{V_F}{v_e} \right)^2} \quad (5.66)$$

Le rendement est maximal et égal à 1 pour $V_F = v_e$. Les gaz éjectés sortiraient sans vitesse de la tuyère.

5.4.8 Impulsion spécifique du propulseur

Cette impulsion est définie comme étant le rapport de l'impulsion totale obtenue (poussée) sur la consommation de l'unité de poids du propergol.

Elle s'écrit :

$$I_s = \frac{F}{qmg} \quad (5.67)$$

Si la tuyère est adaptée à la pression extérieure (ou ambiante), on a :

$$I_s = \frac{qmv_e}{qmg} = \frac{v_e}{g} \quad (5.68)$$

L'unité de l'impulsion spécifique est la seconde.

Si la tuyère n'est pas adaptée, l'impulsion spécifique s'écrit :

$$I_s = \frac{qmv_e + (p_e - p_a) \Omega_e}{qmg} = \frac{p_0 \Omega_c C_F}{qmg} \quad (5.69)$$

On a montré que le débit massique s'écrit

$$qm = C_D p_0 A_c \quad (5.70)$$

avec C_D coefficient de décharge.

L'impulsion spécifique s'écrit alors

$$I_s = \frac{C_F}{g C_D} \quad (5.71)$$

Généralement, on utilise plutôt l'inverse du coefficient de décharge C_D ; il est noté $C^* = \frac{1}{C_D}$ et est appelé vitesse caractéristique.

Son expression est d'après l'expression de C_D donnée par l'équation 5.51 :

$$C^* = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\frac{rT_0}{\gamma}} \quad (5.72)$$

Au final, l'impulsion spécifique s'écrit :

$$I_s = \frac{C_F C^*}{g} \quad (5.73)$$

Chapitre 6

Ondes de choc droit

6.1 Introduction

Lors d'écoulements compressibles à haute vitesse, on trouve des zones où ils existent de fortes variations des propriétés physiques (ρ , p , T) sur des distances très faibles (de l'ordre du libre parcours moyen).

On parle alors de **chocs**.

Sur la figure 6.1, on peut voir une onde de choc droit à la sortie d'une tuyère de Laval.

La technique de visualisation est basée sur la propriété physique que l'indice de réfraction dans un écoulement à haute vitesse est fonction de la masse volumique (méthode strioscopique et omboscopique). Des différences de masse volumique peuvent donc être visualisées. Un choc droit sera caractérisé par un trait.

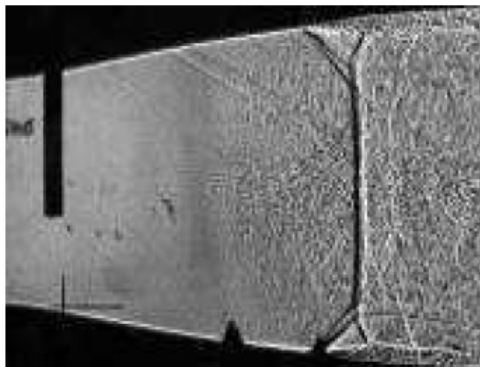


FIGURE 6.1 – Onde de choc droit en sortie de tuyère ©ONERA

6.2 Choc normal

6.2.1 Hypothèses

L'écoulement est supposé :

- permanent (ou stationnaire),
- unidimensionnel,
- absence de transferts thermiques,
- les forces de frottement et de volume sont négligeables
- les surfaces de discontinuité sont des surfaces infiniment minces

On considère un fluide en écoulement dans une veine de section constante et subissant une onde de choc normale à la direction d'écoulement dans un plan fixe. On note Σ cette surface de discontinuité.

L'indice 1 caractérise le fluide en amont de l'onde de choc et l'indice 2 le fluide en aval.

6.2.2 Équations du choc

L'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) s'écrit :

$$\boxed{\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2} \quad (6.1)$$

Le théorème des quantités de mouvement appliqué au fluide compris dans un volume de contrôle incluant le choc donne :

$$p_1 - p_2 = \rho_1 v_1 (v_2 - v_1) \quad (6.2)$$

En utilisant l'équation de continuité, l'équation peut s'écrire

$$p_1 - p_2 = \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 \quad (6.3)$$

Ce qui s'écrit encore

$$\boxed{p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2} \quad (6.4)$$

Du fait de l'absence de forces de frottement, de forces de pesanteur, de la brièveté du choc (transformation adiabatique) le premier principe de la thermodynamique pour un écoulement donne

$$\boxed{h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}} \quad (6.5)$$

Enfin l'équation d'état des gaz parfaits donne

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}} \quad (6.6)$$

6.2.3 Expressions des rapports des pressions, masses volumiques, températures et nombre de Mach en fonction du nombre de Mach aval Ma_1

On note c_1 , c_2 les célérités du son en amont et aval de l'onde de choc droite.

On rappelle que pour un gaz parfait l'enthalpie s'écrit $h = c_p T$.

L'équation 6.5 peut s'écrire

$$c_p T_1 + \frac{M_1^2 c_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{M_2^2 c_2^2}{2} \quad (6.7)$$

En utilisant l'expression de la célérité du son $c = \sqrt{\gamma r T}$, on obtient

$$c_p T_1 + \frac{M_1^2 \gamma r T_1}{2} = c_p T_2 + \frac{M_2^2 \gamma r T_2}{2} \quad (6.8)$$

Le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ s'écrit donc :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{c_p + \frac{1}{2} \gamma r M_1^2}{c_p + \frac{1}{2} \gamma r M_2^2} \quad (6.9)$$

En utilisant la relation de Mayer $c_p - c_v = r$ et l'expression de $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, l'équation 6.9 s'écrit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \quad (6.10)$$

L'équation de continuité 6.1 s'écrit en utilisant le nombre de Mach

$$\rho_1 M_1 \sqrt{\gamma r T_1} = \rho_2 M_2 \sqrt{\gamma r T_2} \quad (6.11)$$

En utilisant l'équation 6.10, on peut écrire :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.12)$$

En introduisant le nombre de Mach dans l'équation de la quantité de mouvement 6.4, on obtient l'équation :

$$p_1 + \gamma p_1 M_1^2 = p_2 + \gamma p_2 M_2^2 \quad (6.13)$$

On en déduit le rapport

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (6.14)$$

A partir de l'équation d'état 6.6, on écrit :

$$\frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad (6.15)$$

En utilisant les équations 6.12, 6.14 et 6.10, on obtient l'équation :

$$\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \quad (6.16)$$

En mettant tout ce qui est relatif à M_1 d'un côté et tout ce qui est relatif à M_2 de l'autre, on arrive à l'équation ci-après :

$$\frac{M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)}{(1 + \gamma M_1^2)^2} = \frac{M_2^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)}{(1 + \gamma M_2^2)^2} \quad (6.17)$$

Cette équation peut-être considérée comme une équation du second degré en M_2^2 ; elle a deux solutions. La solution élémentaire M_1^2 et la solution :

$$\boxed{M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}} \quad (6.18)$$

La courbe nombre de Mach aval sur nombre de Mach amont est représentée sur la figure 6.2

On constate que si l'écoulement est supersonique alors l'écoulement en aval est subsonique.

En utilisant l'expression de M_2^2 (équation 6.18) dans les équations 6.14, 6.10 et 6.12, on obtient :

— Rapport des pressions

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (6.19)$$

Le rapport des pressions aval sur amont est représenté sur la figure 6.3

On constate que la pression à l'aval du choc augmente fortement.

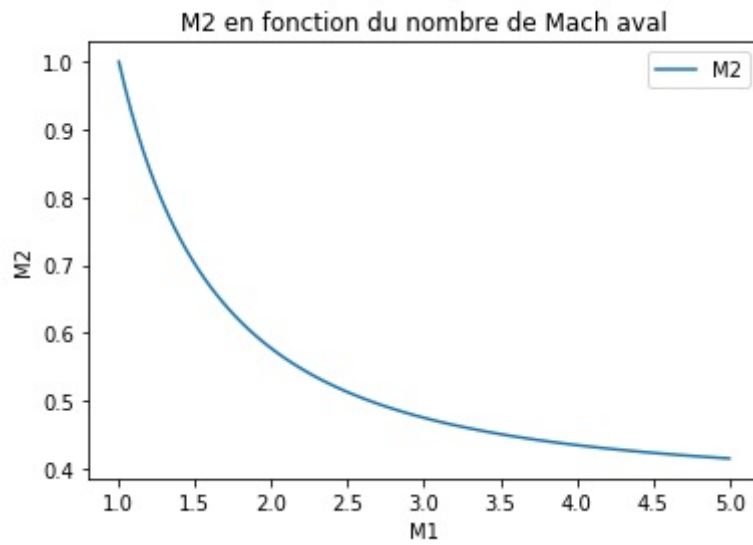


FIGURE 6.2 – M2 versus M1

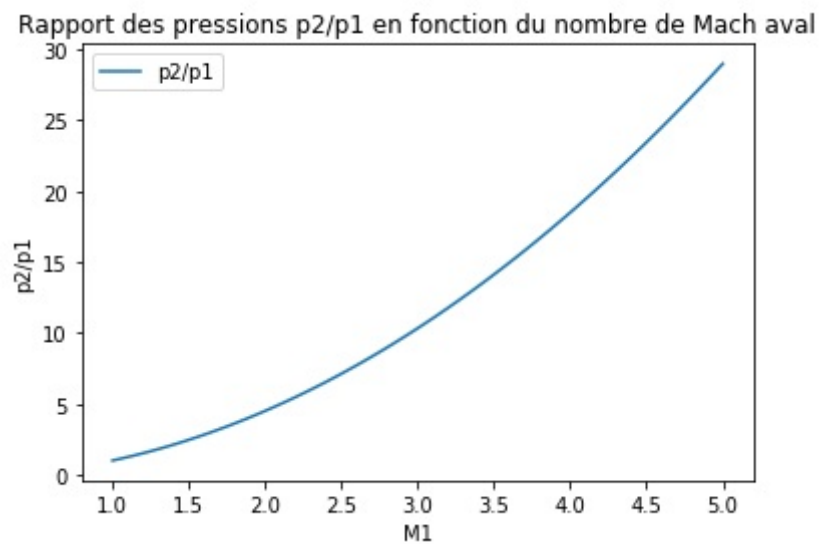


FIGURE 6.3 – p2/p1 versus M1

— Rapport des masses volumiques

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} \quad (6.20)$$

Le rapport des masses volumiques aval sur amont est représenté sur la figure 6.4

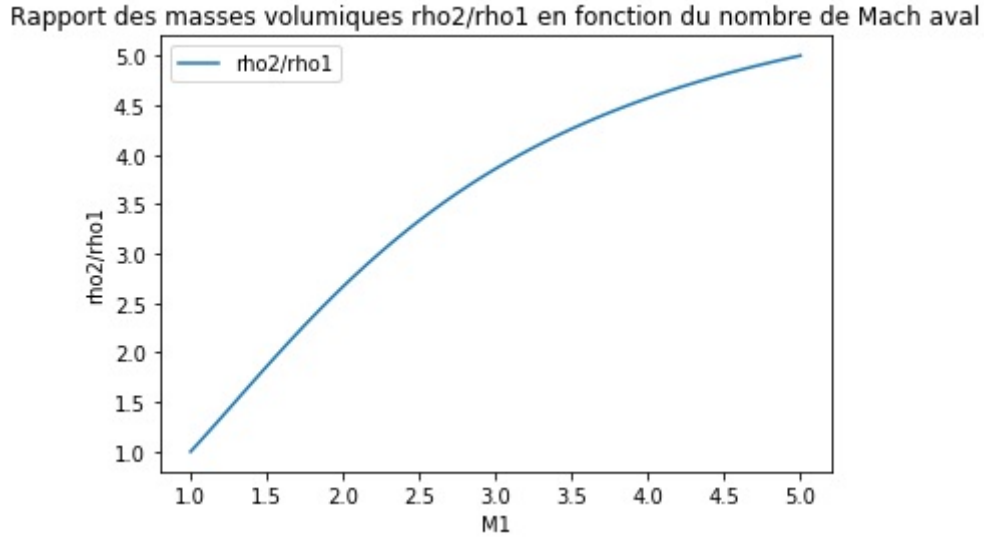


FIGURE 6.4 – rho2/rho1 versus M1

— Rapport des températures

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma - 1) M_1^2) (1 - \gamma + 2\gamma M_1^2)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (6.21)$$

Le rapport des températures aval sur amont est représenté sur la figure 6.5

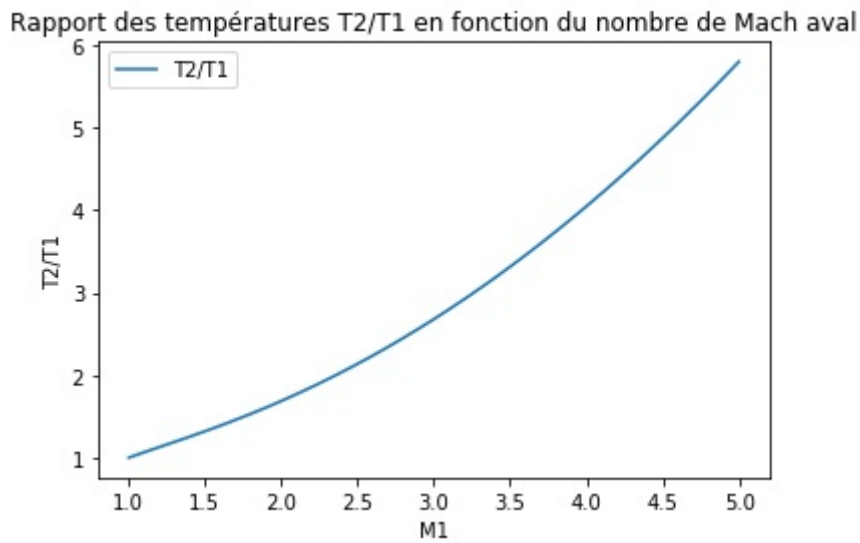


FIGURE 6.5 – T2/T1 versus M1

6.2.4 Variation d'entropie au passage du choc

Pour un gaz parfait, on peut écrire la variation élémentaire d'entropie sous la forme :

$$ds = c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v} = c_v \left[\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} \right] \quad (6.22)$$

En intégrant, la variation d'entropie $s_2 - s_1$ s'écrit :

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (6.23)$$

Ou encore en faisant intervenir les températures et masses volumiques :

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (6.24)$$

L'entropie est une fonction d'état donc cette expression de variation est juste quelle que soit l'évolution. En particulier, elle s'applique au choc qui est un phénomène irréversible.

L'écoulement du fluide étant permanent et comme les transferts thermiques sont négligeables (choc adiabatique), la variation d'entropie $s_2 - s_1$ est supérieure à zéro.

En remplaçant les rapports $\frac{T_2}{T_1}$ et $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ par leurs expressions données par les équations 6.20 et 6.21, $s_2 - s_1$ devient une fonction du nombre de Mach amont M_1 .

Une étude de fonction permet alors de montrer que $M_1 > 0$ c'est à dire que **l'écoulement amont est supersonique**.

La figure montre également que l'irréversibilité du choc ne peut être vérifié que si $M_1 > 1$ c'est à dire que l'écoulement amont est supersonique. En effet la fonction logarithme népérien est supérieure à zéro si la quantité est supérieure à 1.

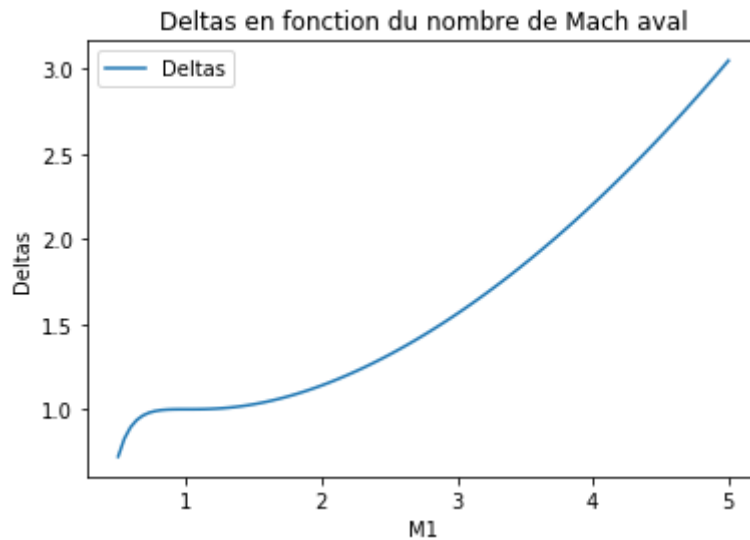


FIGURE 6.6 – Courbe $\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma}$

D'après l'expression 6.18 , $M_1 > 1$ entraîne $M_2 < 1$.

L'écoulement à l'aval du choc est subsonique. Un choc normal décélère un écoulement de manière discontinue de conditions supersoniques à des conditions subsoniques.

De même l'étude des rapports de pressions, températures, masses volumiques montre que

$$\frac{p_2}{p_1} > 1, \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1, \frac{v_2}{v_1} < 1 \text{ et } \frac{T_2}{T_1} > 1$$

6.2.5 Modifications des conditions génératrices

Le choc est adiabatique, il n'y a donc pas de variation d'enthalpie totale à la traversée de celui-ci.

En nommant T_{01} et T_{02} les températures génératrices ou d'arrêt des écoulements amont et aval, on a

$$\begin{aligned} h_{t1} &= h_{t2} \\ cpT_{01} &= cpT_{02} \\ T_{01} &= T_{02} \end{aligned} \quad (6.25)$$

On constate donc que

la température génératrice n'est pas modifiée à la traversée du saut

On a vu dans le chapitre des écoulements isentropiques unidimensionnels les équations suivantes :

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (6.26)$$

et

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (6.27)$$

On peut donc écrire le rapport des pressions génératrices $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ comme :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \quad (6.28)$$

Chaque rapport peut-être exprimé en fonction du nombre de Mach amont M_1 . On obtient alors la relation :

$$\boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} * \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (6.29)$$

On obtient une fonction représentée par la courbe 6.7

On constate que la pression génératrice n'est pas conservée à la traversée d'un choc.

La pression génératrice diminue lors du passage du choc.

Les valeurs numériques montrent que tant que le nombre de Mach amont M_1 est inférieur à 1,2, le rapport des pressions génératrices (ou totales) est peu différent de l'unité.

Ce qui montre que les chocs peu intenses s'écartent peu de la loi isentropique.

Par contre lorsque le nombre de Mach augmente, les élévations de température et de pression deviennent très importantes.

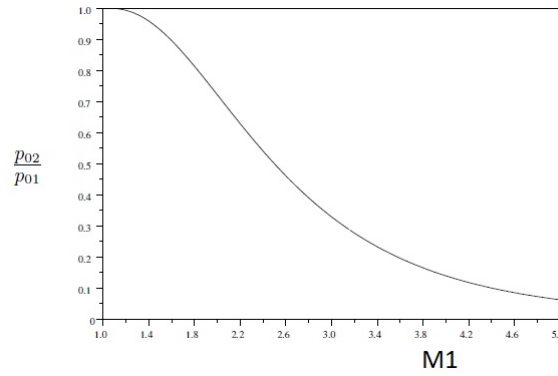


FIGURE 6.7 – Rapport des pressions génératrices versus M1

6.2.6 Expression du rapport des sections critiques

En utilisant l'expression du rapport des sections $\frac{\Omega}{\Omega_c}$ établie dans le chapitre sur les écoulements compressibles, on montre que le rapport des sections critiques $\frac{\Omega_{c2}}{\Omega_{c1}}$ est donné par la relation :

$$\frac{\Omega_{c2}}{\Omega_{c1}} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1) Ma_2^2} \right]^{\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (6.30)$$

Cette équation se traduit par la courbe 6.8

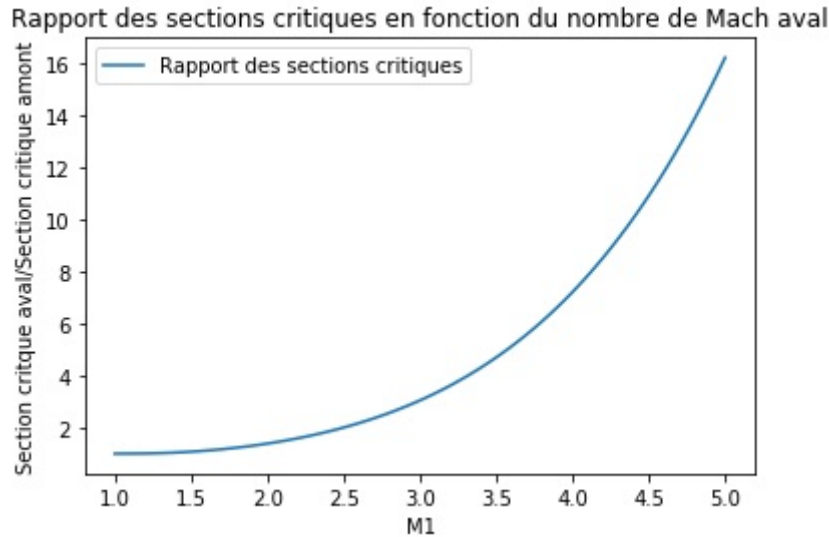


FIGURE 6.8 – Rapport des sections critiques en fonction du nombre de Mach amont M1

On constate que la section critique augmente modérément jusqu'à $Ma = 2,5$ puis nettement.

Chapitre 7

Ondes de choc oblique

7.1 Introduction

Un obstacle fixe ou un changement de direction dans un écoulement de gaz en écoulement hypersonique sont à l'origine d'un choc.

On peut citer comme exemple :

- L'onde balistique créée dans l'atmosphère par un projectile animé d'une vitesse supersonique tel qu'une balle de fusil (7.1).

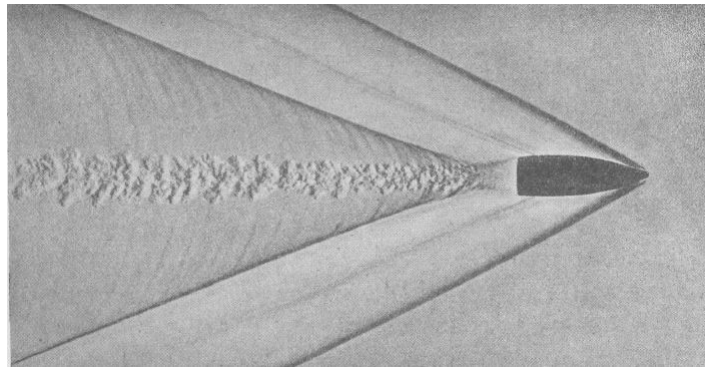


FIGURE 7.1 – Sillage de choc d'une balle de fusil

- Ondes de chocs obliques créés par un avion supersonique

La figure ci-après (cf. figure 7.2) réalisée sur une campagne d'essais menée entre 2011 et 2015 par des chercheurs américains montre les ondes de choc oblique générées par un avion en vol supersonique.

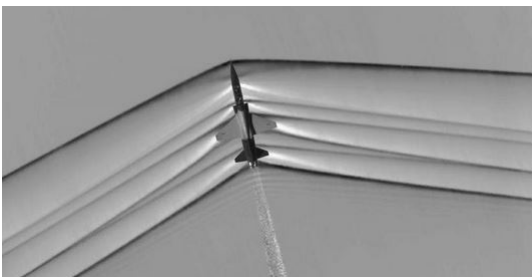


FIGURE 7.2 – Ondes de choc attachées à un avion en vol supersonique ($M=1,09$) ©NASA

- Onde de choc dans une tuyère de Laval
- Onde de choc détachée

7.2 Équations à la traversée du choc oblique

On considère la base $(\vec{n}, \vec{t})$ la base liée à l'onde de choc c'est à dire :

- $\vec{n}$ vecteur normal à l'onde de choc,
- $\vec{t}$ vecteur tangentiel à l'onde de choc.

Dans cette base les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ont pour composantes (v_{1n}, v_{1t}) et (v_{2n}, v_{2t}) .

On a les relations :

$$v_1^2 = v_{1n}^2 + v_{1t}^2 \quad (7.1)$$

et

$$v_2^2 = v_{2n}^2 + v_{2t}^2 \quad (7.2)$$

D'après la figure, les composantes tangentielle et normale du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ dans la base $(\vec{n}, \vec{t})$ s'écrivent :

$$\begin{cases} v_{1t} &= v_1 \cos \varepsilon \\ v_{1n} &= v_1 \sin \varepsilon \end{cases} \quad (7.3)$$

De même pour le vecteur $\vec{v}_2$, on a

$$\begin{cases} v_{2t} &= v_2 \cos \beta \\ v_{2n} &= v_2 \sin \beta \end{cases} \quad (7.4)$$

D'après la figure, on a également entre les angles la relation :

$$\boxed{\delta = \varepsilon - \beta} \quad (7.5)$$

Les équations de conservation de la masse et de l'énergie s'écrivent à la traversée du saut :

$$\boxed{\begin{cases} \rho_1 v_{1n} &= \rho_2 v_{2n} \\ \rho_1 v_{1n}^2 + p_1 &= \rho_2 v_{2n}^2 + p_2 \\ v_{1t} &= v_{2t} \\ h_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} &= h_2 + \frac{v_{2n}^2}{2} \end{cases}} \quad (7.6)$$

Les trois premières équations traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

La dernière traduit la conservation de l'énergie.

On a également l'inégalité suivante du fait de l'irréversibilité du choc :

$$\boxed{s_2 > s_1} \quad (7.7)$$

On constate que ce système d'équations a le même formalisme que celui du choc droit . Les termes v_{1n} et v_{2n} jouent le même rôle que les termes v_1 et v_2 .

7.3 Expressions des rapports de pressions, températures, masses volumiques et nombre de Mach

D'après la constatation précédente, on peut reprendre les expressions obtenues pour le choc droit.

Les relations sont donc :

— Rapport des températures

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2) (1 - \gamma + 2\gamma M_{1n}^2)}{(\gamma + 1)^2 M_{1n}^2} \quad (7.8)$$

— Rapport des masses volumiques

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_{1n}^2} \quad (7.9)$$

— Rapport des pressions

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{1n}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (7.10)$$

— Expression du nombre de Mach aval

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}{1 - \gamma + 2\gamma M_{1n}^2} \quad (7.11)$$

avec $M_{1n} = \frac{v_{1n}}{a_1}$ et $M_{2n} = \frac{v_{2n}}{a_2}$ où a_1 et a_2 sont les célérités du son.

En utilisant les expressions des composantes normales, on peut écrire :

$$M_{1n} = \frac{V_1}{a_1} \sin \varepsilon = M_1 \sin \varepsilon \quad (7.12)$$

et

$$M_{2n} = \frac{V_2}{a_2} \sin \beta = M_2 \sin \beta = M_2 \sin (\varepsilon - \delta) \quad (7.13)$$

7.4 Expression de la différence d'entropie et conséquence

En considérant le gaz comme un gaz parfait, la variation $\Delta s = s_2 - s_1$ peut s'écrire

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (7.14)$$

Du fait du caractère irréversible du choc, on a $\Delta s > 0$.

L'étude de la fonction (étude longue) permet de montrer que cette inégalité est vérifiée si $M_{1n} > 1$ et $M_{2n} < 1$.

On a donc $M_1 \sin \varepsilon > 1$ et donc $M_1 > \frac{1}{\sin \varepsilon} > 1$.

De même $M_{2n} = M_2 \sin \beta < 1$ donc $M_2 < \frac{1}{\sin \beta}$. Par conséquent $M_2 > 1$ ou $M_2 < 1$.

Le bilan est donc :

Une onde de choc oblique ne peut apparaître qu'en écoulement supersonique ; par contre l'écoulement en aval du choc peut être supersonique ou subsonique.

Il y a :

- diminution du nombre de Mach,
- augmentation de la pression,
- augmentation de la température,
- augmentation de la masse volumique.

7.5 Polaire de choc

On connaît l'écoulement avant le choc.

On cherche à déterminer les angles ε c'est à dire l'orientation de l'onde de choc et δ le changement de direction de l'écoulement.

On a la relation $v_{1t} = v_{2t}$ qui peut s'écrire :

$$\boxed{v_1 \cos(\varepsilon) = v_2 \cos(\varepsilon - \delta)} \quad (7.15)$$

De même on a la relation $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$ qui peut s'écrire :

$$\boxed{\rho_1 v_1 \sin(\varepsilon) = \rho_2 v_2 \sin(\varepsilon - \delta)} \quad (7.16)$$

L'équation 7.15 donne

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos(\varepsilon - \delta)}{\cos(\varepsilon)} \quad (7.17)$$

L'équation 7.16 donne

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2 \sin(\varepsilon - \delta)}{v_1 \sin(\varepsilon)} = \frac{\cos(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon - \delta)} \frac{\sin(\varepsilon - \delta)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{\tan(\varepsilon - \delta)}{\tan(\varepsilon)} \quad (7.18)$$

En utilisant l'expression du rapport des masses volumiques en fonction du nombre de Mach (cf. équation 7.9, on obtient l'équation :

$$\boxed{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_{1n}^2} = \frac{\tan(\varepsilon - \delta)}{\tan(\varepsilon)}} \quad (7.19)$$

Hypothèse :

L'angle ε de l'onde de choc oblique est comprise dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour un nombre de Mach amont M_1 donné, on a la condition :

$$M_1 \sin(\varepsilon) \geq 1 \quad (7.20)$$

On a donc

$$\sin(\varepsilon) \geq \frac{1}{M_1} \quad (7.21)$$

D'où

$$\boxed{\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}} \quad (7.22)$$

L'équation 7.19 détermine les courbes $\delta = \delta(M_1, \varepsilon)$.

Elles sont représentées pour quelques valeurs de M_1 sur la figure 7.3

Commentaires

- L'angle δ est généralement connu car souvent le choc oblique apparaît avec un obstacle. Le fluide étant parfait, on considère que le fluide s'écoule parallèlement à la surface de l'obstacle.
- Pour chaque valeur du nombre de Mach amont M_1 , il existe une valeur maximale de l'angle δ repérée par le symbole $*$.
 - si $\delta = \delta_{max}(M_1)$ une unique solution (ε) existe,
 - si $\delta \in [0, \delta_{max}(M_1)]$ deux solutions existent :

$$\arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) < \varepsilon^- < \varepsilon^+ < \frac{\pi}{2} \quad (7.23)$$

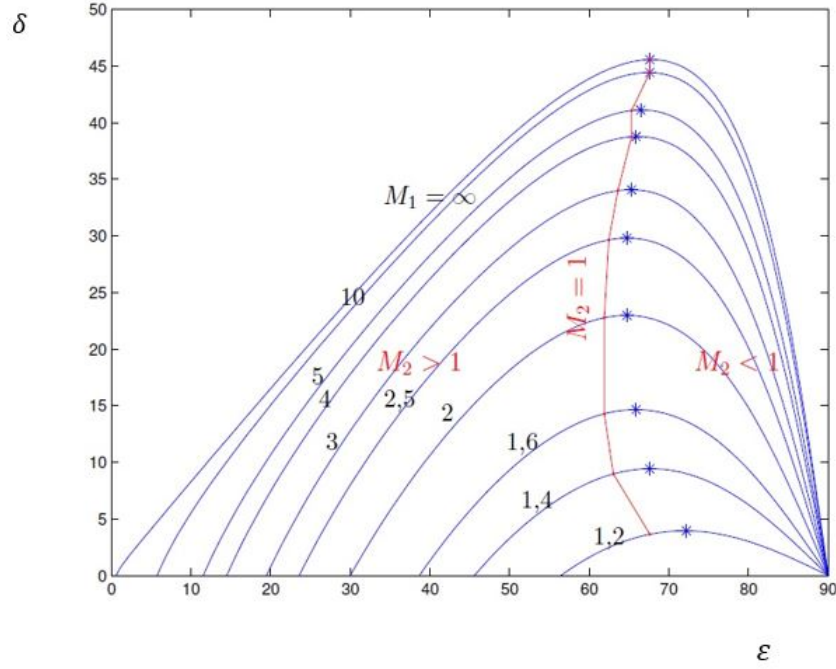


FIGURE 7.3 – Polaires de choc pour le gaz parfait ©ENSTA PARIS

— la ligne en trait continu représente la ligne sonique aval $M_2 = 1$.

On rappelle l'expression du rapport des pressions :

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{1n}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1 \sin(\varepsilon))^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (7.24)$$

Ce rapport est donc une fonction croissante de $\sin(\varepsilon)$ et par conséquent de ε .

On a donc l'inégalité suivante :

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1}(\varepsilon^+) > \frac{p_2}{p_1}(\varepsilon^-)} \quad (7.25)$$

On parle donc de choc fort pour la solution ε^+ et de choc faible pour la solution ε^-

Remarque : en dehors de conditions particulières imposées à l'aval, des considérations de stabilité favorisent la solution du choc faible.

La figure 7.3 montre également :

- les chocs forts conduisent toujours en aval à un écoulement subsonique,
- les chocs faibles conduisent en aval à un écoulement supersonique ou subsonique.

Lorsque l'angle de déviation est trop grand, le modèle du choc oblique attaché n'est plus valable.

Bibliographie

- [1] LALLEMAND A. Ecoulements des fluides - fluides compressibles en monodimensionnel. *Techniques de l'Ingénieur - BE8165 V1*, 2020.
- [2] BAUER P. *Propulseurs aéronautiques et spatiaux - Thermodynamique des gaz inertes et réactifs - Systèmes de propulsion anaérobie et aérobie*. Paris : Ellipses, 2009.
- [3] COMOLET R. *Mécanique expérimentale des fluides, Tome II Dynamique des fluides réels, Turbomachines*. Paris : Masson, 1994.
- [4] KLING R. *Thermodynamique générale et applications*. Paris : Editions Technip, 1980.
- [5] CANDEL S. *Mécanique des fluides*. Paris : Dunod Université, 1990.
- [6] XUE H. WHITE F.-M. *Fluid Mechanics*. New York : Mc Graw Hill, 2021.